

① در یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جمله ی بعدی است. جمله ی دوم چند برابر جمله ی اول است؟

پاسخ: $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$ فرمول محاسبه مجموع جمله های دنباله حسابی:

$$S_5 = \frac{5}{2} (2a_1 + 4d) = 5a_1 + 10d \rightarrow \text{مجموع ۵ جمله اول}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d \quad S_{10} - S_5 = 5a_1 + 35d \rightarrow \text{مجموع ۵ جمله ی دوم}$$

$$5a_1 + 10d = \frac{1}{4} (5a_1 + 35d)$$

$$15a_1 + 20d = 5a_1 + 35d$$

$$10a_1 = 15d$$

$$2a_1 = 3d$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = 3$$

② اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را بدست آورید.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{12}{1} = 12$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{1}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{12+2} = 4$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{4}{1} = 4$$

③ معادلات زیر را حل کنید.

$$x(x^2-9)\sqrt{x-2} = 0$$

(الف)

$$x(x-3)(x+3)\sqrt{x-2} = 0$$

پاسخ:

$$x-2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x = 0 \quad \times \text{ غیر قابل قبول}$$

$$x-3 = 0 \quad x = 3 \checkmark$$

$$x+3 = 0 \quad x = -3 \quad \times \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\sqrt{x-2} = 0 \quad x = 2 \checkmark$$

$$|x-1-3| < 3 \quad \text{ب}$$

$$|x-1-3| < 3 \rightarrow -3 < |x-1-3| < 3 \rightarrow \underbrace{0 < |x-1| < 6}_{\text{پاسخ}}$$

با توجه به خواص قدر مطلق این بخش از نامعادله به ازای هر x به حرکت برقرار است.

$$|x-1| < 6 \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 - 2x + 1 < 36 \quad x^2 - 2x - 35 < 0 \quad (x+5)(x-7) < 0$$

$$-5 < x < 7$$

$$\text{پاسخ نهایی} \rightarrow x \in (-5, 7) - \{1\}$$

$$\text{۴) ضابطه‌ی تابع وارون} \quad f(x) = \frac{5x+1}{x-3} \text{ را به دست آورید.}$$

پاسخ: برای به دست آوردن وارون تابع باید x را بر حسب y بی‌دست آوریم.

$$y = \frac{5x-1}{x-3} \quad yx - 3y = 5x - 1 \quad yx - 5x = 3y - 1 \quad x(y-5) = 3y-1$$

$$x = \frac{3y-1}{y-5} \xrightarrow{\text{بلی نوشتن ضابطه نهایی f-1 جای x در معضلی کنیم}} f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-5} \quad (x \neq 5)$$

$$\text{۵) اگر } g(x) = 2x-1 \text{ و } f \circ g(x) = \frac{x}{x-3} \text{ باشد، مقدار } f(2) \text{ را به دست آورید.}$$

$$g(a) = 2 \quad 2a-1 = 2 \quad a = 2 \quad \text{پاسخ:}$$

$$f(2) = f(g(a)) = f(g(2)) = \frac{2}{2-3} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\text{۶) اگر } f = \{(1,2), (2,5), (3,1)\} \text{ و } g = \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \text{ باشد، آن گاه } f \circ g \text{ را به دست آورید.}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{2, 3\} \quad \text{پاسخ:}$$

$$f \circ g = \{(2,1), (3,2)\}$$

$$f(g(2)) = f(3) = 1 \quad f(g(3)) = f(1) = 2$$

⑦ معادلات لگاریتمی زیر را رسم کنید.

الف) $\log_{\Delta}(2x-1) + \log_{\Delta}(2x-5) = 1$

پاسخ: $\log_{\Delta}(2x-1)(2x-5) = 1 \rightarrow \log_{\Delta}^{(2x-1)(2x-5)} = \log_{\Delta} \Delta \rightarrow (2x-1)(2x-5) = \Delta$

$\rightarrow 4x^2 - 2x - 10x + 5 = \Delta$ $4x^2 - 12x = 0$ $x(4x-12) = 0$ $x = 0$ $x = 3$ $x = \frac{12}{4} = 3$
در دامنه نیست $x = 0$ ✓

$2x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$, $2x-5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow x > \frac{5}{2}$ بررسی دامنه:

ب) $2 \log \sqrt{2x+3} = \frac{1}{4} \log 16 - \log(2x-3)$

پاسخ: $2 \log \sqrt{2x+3} = \frac{1}{4} \log 16 - \log(2x-3)$ $2x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$ $2x-3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2}$

$\log 2x+3 = \log v - \log(2x-3)$

$\log 2x+3 = \log \frac{v}{2x-3}$ $2x+3 = \frac{v}{2x-3}$ $4x^2 - 9 = v$ $4x^2 - 16 = 0$
 $4(x-2)(x+2) = 0$ $x = 2$ ✓ $x = -2$ در دامنه نیست.

⑧ حاصل عبارات های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{\tan(x - \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - \sin^2(\frac{\sqrt{x}}{4} - x)}{\cos(x - \frac{\pi}{4}) \tan(\frac{\pi}{4} + x)}$

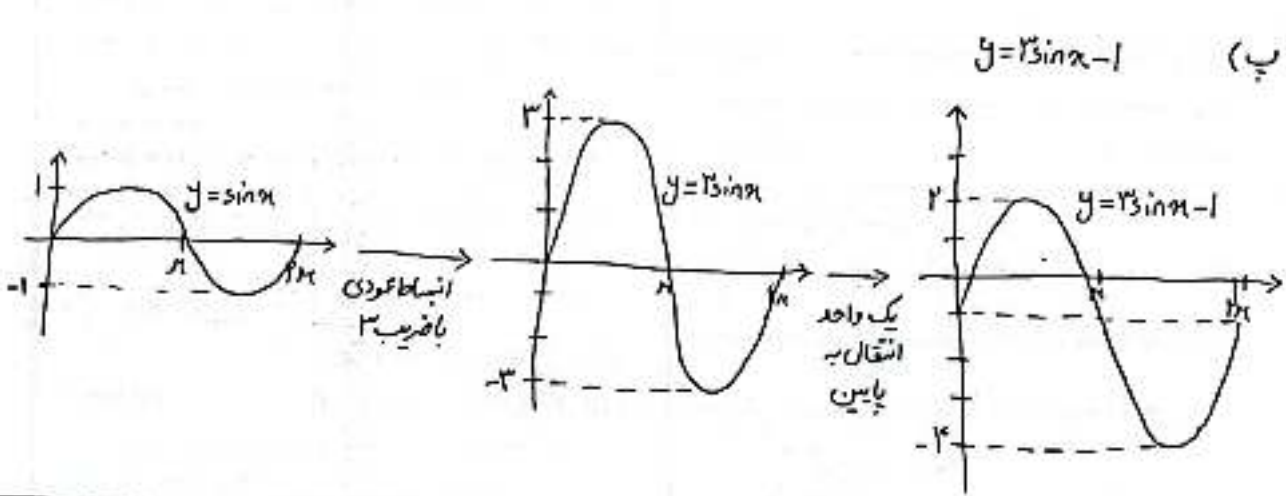
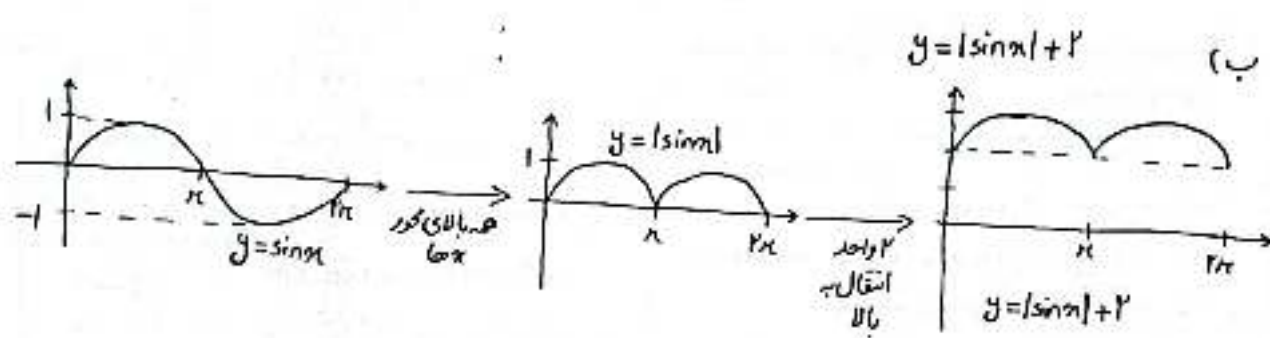
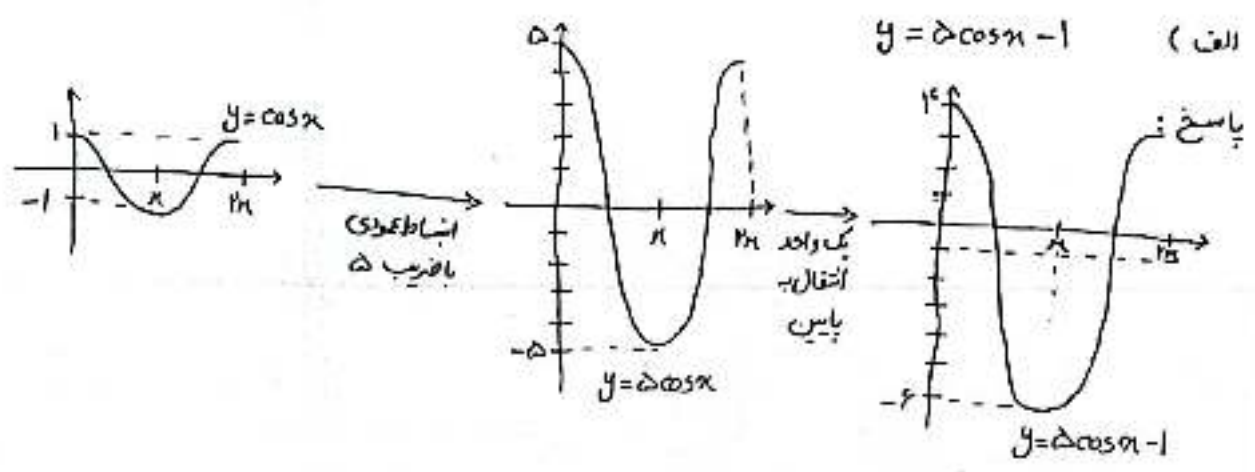
پاسخ: $\frac{-\tan(\frac{\pi}{4} - x) \sin x + \cos^2 x}{\sin x \cdot (-\cot x)} = \frac{-\cot x \cdot \sin x + \cos^2 x}{\sin x \cdot (-\cot x)}$

$= \frac{-\frac{\cos x}{\sin x} \sin x + \cos^2 x}{\sin x \cdot (-\frac{\cos x}{\sin x})} = \frac{-\cos x + \cos^2 x}{-\cos x} = 1 - \cos x = \sin^2 x$

ب) $\frac{\sin 16^\circ - \cos 2^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 17^\circ}$

پاسخ: $\frac{\sin(11^\circ - 2^\circ) - \cos(11^\circ + 2^\circ)}{\cos(9^\circ + 2^\circ) + \sin(9^\circ - 2^\circ)} = \frac{\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos 2^\circ} \frac{\tan 2^\circ + 1}{1 - \tan 2^\circ} = \frac{1.036}{0.974}$

۹) نمودار توابع زیر را رسم کنید.



۱۰) حاصل عملیات های زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$

یافته: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x+1)(x-2)|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{2x^2 - x^2 - 12}$

$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{x^2 - 12} = \frac{-3 \times 1}{3 \times 12} = \boxed{-\frac{1}{12}}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - 2x}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - 2x} \times \frac{x + \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2x}{\sqrt{x+1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)(\sqrt{x+1} + 2x)}{(x+1 - 4x^2)(x + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{x+1} + 2x)}{-(x-2)(2x+1)(x + \sqrt{x+1})} = \frac{2 \times 1 \times 2}{-1 \times 5} = \boxed{-\frac{2}{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x}$$

(پ)

$$\star \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - |\cos x|}{|\sin x| \sin x}$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{-\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{-(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{-(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$



پاسخ:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-(1 + \cos x)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

تابع ضابطه‌ی ① $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} & x > 1 \\ ax - a + 3 & x \leq 1 \end{cases}$ برای $x=1$ پیوسته است ؟

پاسخ: برای این که تابع در $x=1$ پیوسته باشد باید مقدار و حد است و چپ تابع در $x=1$ برابر باشند.

$$f(1) = a - a + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - a + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 3$$

⇒ پس این تابع به ازای هر مقدار در $x=1$ پیوسته است.